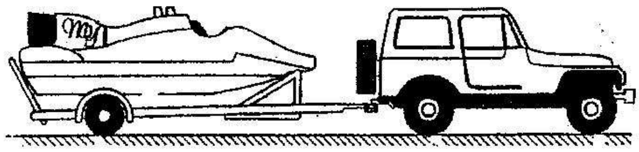
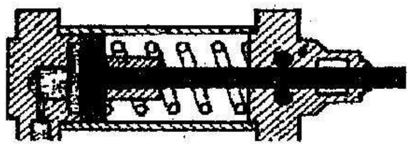
CHAPITRE 1 : NOTION D'ACTION MECANIQUE

1 - Définitions.

➢ Une ***action mécanique*** est un phénomène physique capable de créer ou de modifier un mouvement ou de déformer un corps.

Exemples :

① Tracter une remorque.	☞		⇨	Déplacement (avance)
② Intercepter un ballon	☞		⇨	Modification de mouvement (trajectoire - vitesse)
③ Comprimer un ressort	☞		⇨	Déformation (compression du ressort)

➢ La réalisation d'une action mécanique implique la mise en présence de deux ***systèmes matériels***.

Ex :

① ☞ Voiture / Remorque	② ☞ Pied du joueur / Ballon	③ ☞ Piston / Ressort

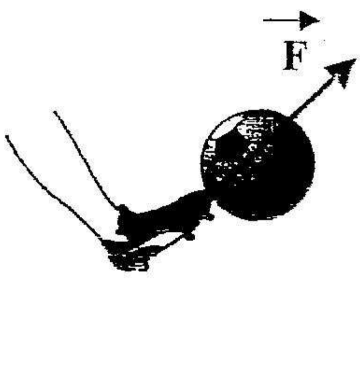
🕮 → Il existe deux types d'actions mécaniques :

- les ***actions*** mécaniques ***de contact*** :
  Ex : - frappe du pied sur le ballon
  - actions entre solides au sein d'un mécanisme
- les ***actions*** mécaniques ***à distance*** :
  Ex : - effet de marée provoqué par la lune sur les océans (action massique)
  - attraction d'un aimant sur un objet métallique ferreux (action magnétique ou électromagnétique)

2 - Force.

→ La force correspond à l'action mécanique de base.

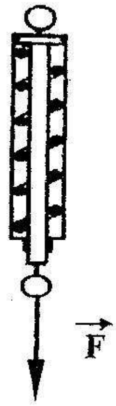
Dans la réalité, le plus souvent, une action mécanique résulte de la conjonction d'un ensemble de forces élémentaires.



Unité de force : le **Newton** (N) (ou multiples : daN - kN...).

Vecteur force : $\overrightarrow{F}$
- Point d'application (origine)
- Direction ligne d'action support
- Sens orientation
- Intensité (norme) valeur N

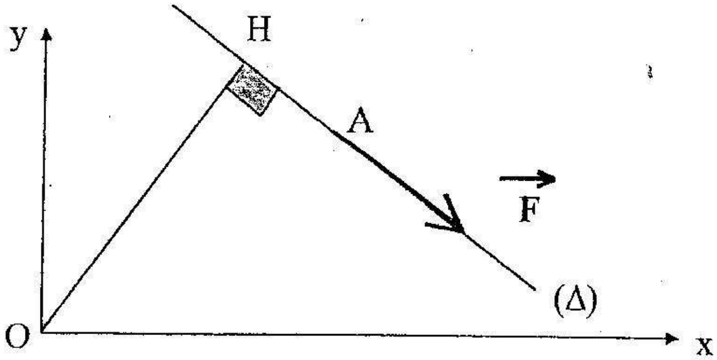
Vecteur



Exemple : mesure d'une force à l'aide d'un dynamomètre à ressort

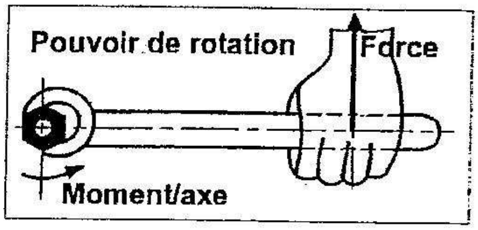
Une force a un pouvoir de translation

3 - Moment d'une force par rapport à un point.



$$M_O\overrightarrow{F} = d\ .\ \|\overrightarrow{F}\|$$

avec : d = OH = ***bras de levier***



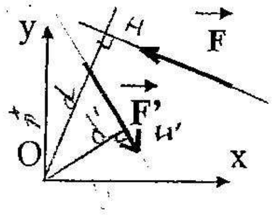
Le moment traduit un pouvoir de rotation

Unité de moment : le **Newton . mètre** (N.m) et ses multiples et sous-multiples

Remarque ❶ : la force $\overrightarrow{F}$ peut « ***glisser*** » sur son ***support*** sans que cela ne change la valeur de son moment par rapport au point O.

Remarque ❷ : dans le cas ou l'on travaille dans un repère d'axes orientés, il est possible de donner une valeur algébrique au moment et de définir ainsi un ***moment algébrique***.

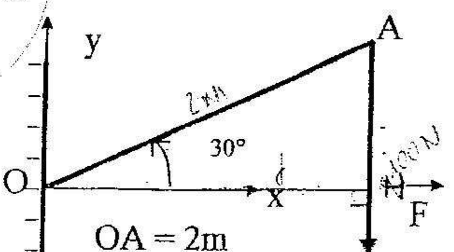
Le « signe » du moment dépend alors :
- du sens de rotation positif défini dans le repère (généralement le sens direct, soit de x vers y).
- du sens de rotation imprimé par la force par rapport au point.



$\overrightarrow{MoF} > 0$

$\overrightarrow{MoF'} < 0$

Application :



OA = 2m

$\|\overrightarrow{F}\|$ = 100 N

<u>**Poutre encastrée**</u>

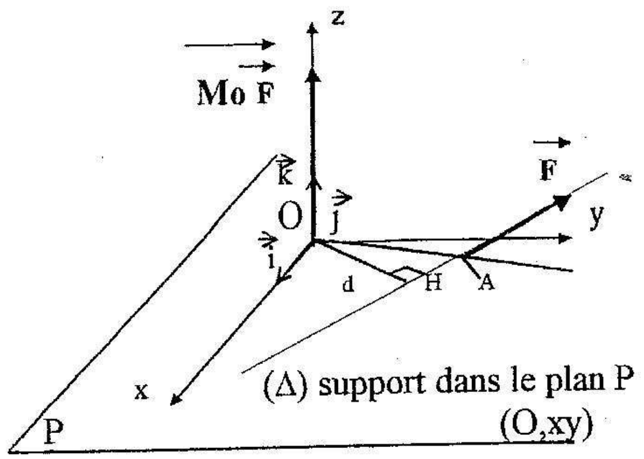
$M_O\overrightarrow{F} =$ cos(30) = $\frac{d}{\ell}$ = ℓ cos(30) = d

d = √3 = 1,732

$M_O\overrightarrow{F}$ = d . $\|\overrightarrow{F}\|$ = √3 x 100 = 173,2

$M_O\overrightarrow{F} =$ 173,20

4 - Vecteur moment - Produit vectoriel.



$\overrightarrow{M_O \vec{F}}$

- *Origine* : le point O
- *Direction* ou support : perpendiculaire au plan (P) contenant la force $\vec{F}$ et le point O
- *Sens* : défini par la règle du tire-bouchon
- *Norme* : $\|\overrightarrow{M_O \vec{F}}\| = d.\|\vec{F}\|$

Le vecteur $\overrightarrow{M_O \vec{F}}$ est aussi le résultat du «produit vectoriel » des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}$, soit :

$$\boxed{\overrightarrow{M_O \vec{F}} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}}$$

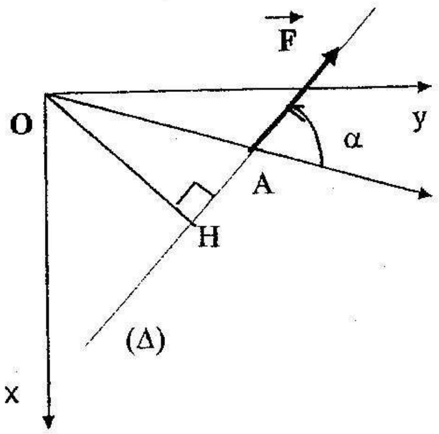
produit vectoriel

Avec : $\|\overrightarrow{M_O \vec{F}}\| = \|\overrightarrow{OA}\| . \|\vec{F}\|.\sin(\overrightarrow{OA}, \vec{F})$

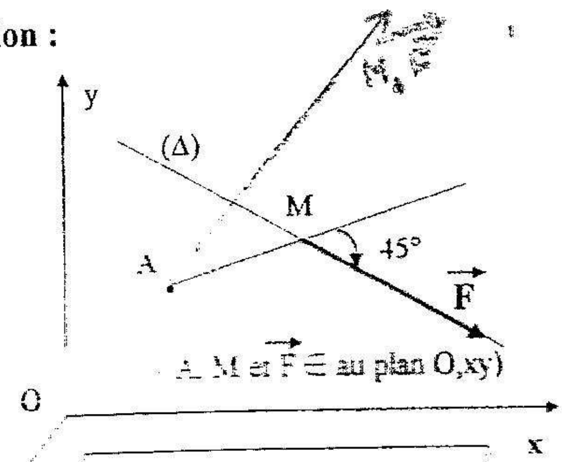
$= \|\overrightarrow{OA}\| . \|\vec{F}\|.\sin \alpha$

Remarque : $\|\overrightarrow{OA}\|.\sin \alpha = d$ (bras de levier)

$(OH/OA = \sin \alpha \Rightarrow OH = OA. \sin \alpha)$



Application :



Données
AM = 1 m ; $\|\vec{F}\|$ = 200N

Déterminer :

$\|\overrightarrow{M_A \vec{F}}\| =$ ‖$\overrightarrow{AM}$‖ × ‖F‖ × |sin(315)|

1×200 × sin(315) = −141,421

1×200 × |0,707| = 141,420 Nm

$\overrightarrow{M_A \vec{F}}$ = −141 . $\vec{z}$

Représenter sur la figure le vecteur $\overrightarrow{M_A \vec{F}}$ (norme échelle

Attention ! $\vec{F} \wedge \vec{OA} = - \vec{OA} \wedge \vec{F}$

Le produit vectoriel n'est pas commutatif.

Cas de nullité :
- $\vec{OA}$ «ou, et » $\vec{F}$ sont nuls
- $\vec{OA}$ et $\vec{F}$ colinéaires

Forme analytique :

$$\vec{OA}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \qquad \vec{F}\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$$

$$\vec{OA} \wedge \vec{F} = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) \wedge (X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k})$$

Développer en appliquant la distributivité du produit vectoriel, puis factoriser les vect. $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$

= ....

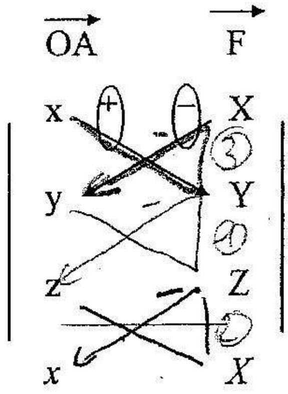
....

....

= ....

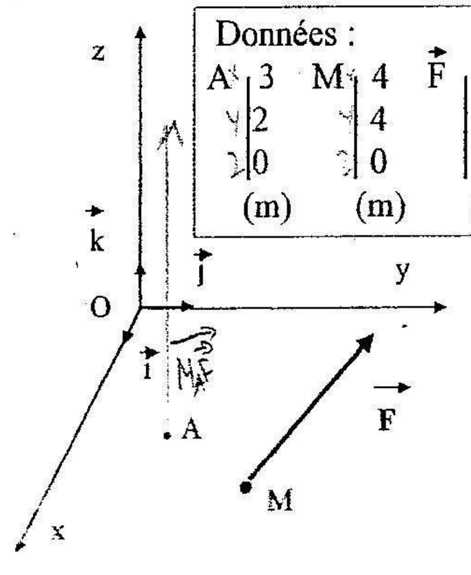
....

Soit : $\vec{OA} \wedge \vec{F} \begin{vmatrix} yZ - Yz \ldots \vec{x} \\ zX - Zx \ldots \vec{y} \\ xY - Xy \ldots \vec{z} \end{vmatrix}$



← « ***Produit en croix*** »

Application :



Données :

	A	M	F
x	3	4	-20
y	2	4	10
z	0	0	0
	(m)	(m)	(N)

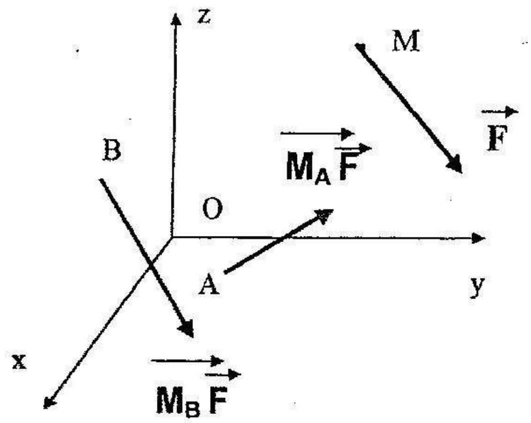
* Déterminer les composantes du vecteur $\vec{M_A F} = \vec{AM} \wedge \vec{F}$

$$\vec{AM}\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \vec{F}\begin{vmatrix} -20 \\ 10 \\ 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \vec{AM} \wedge \vec{F}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -30 \end{vmatrix}$$

* **Représenter le vecteur $\vec{M_A F}$ sur la figure (norme quelconque).**

* **Donner la norme $\|\vec{M_A F}\|$ = [illegible] N.m**

5 - Variation du moment.



$$\overrightarrow{M_A\vec{F}} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

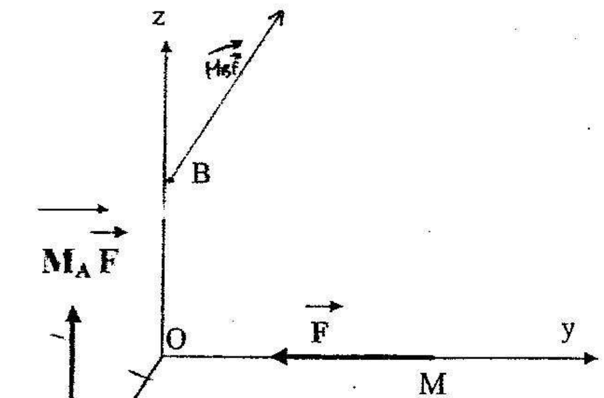
$$\overrightarrow{M_B\vec{F}} = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{F}$$

$$= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \wedge \vec{F}$$

$$= \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} + \underbrace{\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}}_{\overrightarrow{M_A\vec{F}}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_B\vec{F}} = \overrightarrow{M_A\vec{F}} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}}$$

Application :



Données :
Force $\vec{F}$ d'intensité 200N portée par Oy (sens négatif).

$A \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ (m) $\quad B \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$ (m) $\quad \overrightarrow{M_A\vec{F}} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 600 \end{vmatrix}$ (N.m)

* Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{M_B\vec{F}}$ sachant que :

$$\overrightarrow{M_B\vec{F}} = \overrightarrow{M_A\vec{F}} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

$$\begin{vmatrix} -600 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 600 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -200 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -600 \\ 0 \\ -600 \end{vmatrix}$$

* Représenter $\overrightarrow{M_B\vec{F}}$ sur la figure.

6 - Modélisation simplifiée d'une action mécanique. (cas d'une force pure)

Force	*Pt. application* •	*Direction et sens* $\longrightarrow$	*Intensité* $\Vert\ \Vert$
$\overrightarrow{F_A\,2/1}$	**A**	30°	**250 N**

← **Exemple**

7 - Modélisation d'une action mécanique par un torseur.

En statique, le torseur peut être dénommé : torseur d'action mécanique, torseur d'effort transmissible ou encore, plus simplement, torseur statique.

Le torseur statique permet de définir les « efforts » qui peuvent être transmis entre deux solides.

Il résulte de l'association de 2 « champs » de vecteurs :

⇒ un champ de vecteurs «Résultante » $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ (force)

⇒ un champ de vecteurs « Moment résultant » $\overrightarrow{\mathbf{M}}$

Notation : $$\{T\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\mathbf{R}} \\ \overrightarrow{\mathbf{M}} \end{matrix} \right\} \text{ ou } \{\overrightarrow{\mathbf{R}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}\}$$

Sous forme analytique : $$\{T\} = \underbrace{\left\{ \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \right.}_{\text{Résultante}} \underbrace{\left| \begin{matrix} L \\ M \\ N \end{matrix} \right\}}_{\text{Moment résultant}} \underbrace{\mathbf{R = (O, xyz)}}_{\text{Repère}}$$

* $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ est l'invariant du torseur.
* $\overrightarrow{\mathbf{M}}$ varie selon la relation : $\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_A}$

Dans la pratique, on définit un « exemplaire » du torseur au « centre » de la liaison entre solides.

➽ le torseur est alors « **réduit en point** » et comporte deux « **éléments de réduction** ».

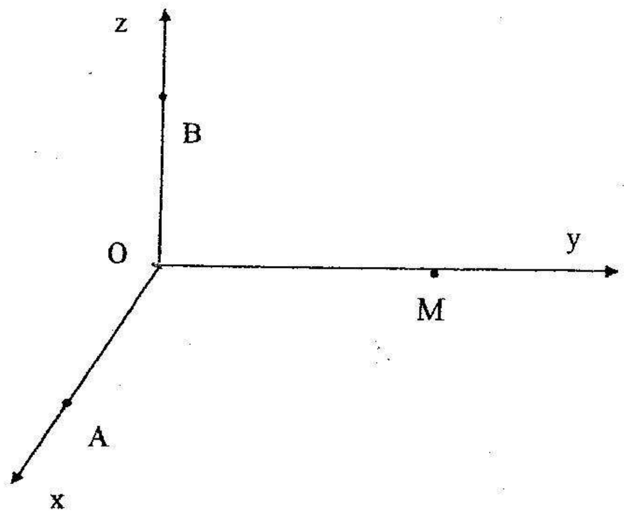
$$\underbrace{\{T\}_A}_{\text{Point de réduction}} = \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\mathbf{R_A}} \\ \overrightarrow{\mathbf{M_A}} \end{matrix} \right\}_A}_{\text{Eléments de réduction}} = {}_A\left\{ \begin{matrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{matrix} \right\} \underbrace{R = (O, xyz)}_{\text{Repère}}$$

Application :

* En reprenant les données et résultats de l'application du § 5, définir analytiquement les torseurs relatifs à la force $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ aux points M, A et B.

$$\{T\}_M = {}_M\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -200 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_R, \quad \{T\}_A = {}_A\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -200 & 0 \\ 0 & 600 \end{array} \right\}_R, \quad \{T\}_B = {}_B\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & -600 \\ 200 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_R$$

* Représenter ces torseurs sur la figure qui suit.



Torseurs particuliers.

❶ *Torseur nul*

$$\{T\}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A \qquad \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \{ 0 \}_A$$

Le « torseur nul » est nul en tout point de l'espace (absence d'action ou plusieurs actions dont l'effet est globalement nul).

❷ *Torseur couple*

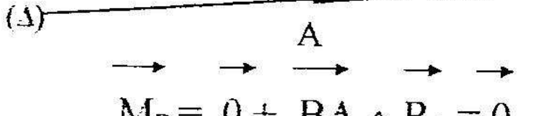
$$\{T\}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A} \end{matrix} \right\}_A$$

Le torseur couple est invariant.
Son moment résultant reste inchangé en tout point de l'espace.
En effet :

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{0} = \overrightarrow{M_A}$$

❸ *Torseur glisseur*

$$\{T\}_A = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_A} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$$



$$\overrightarrow{M_B} = \vec{0} + \underbrace{\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_A}}_{} = \vec{0}$$

(produit vectoriel de 2 vect. colinéaires)

La force $\overrightarrow{R_A}$ peut « glisser » sur son support.

❹ *Torseur résultant*

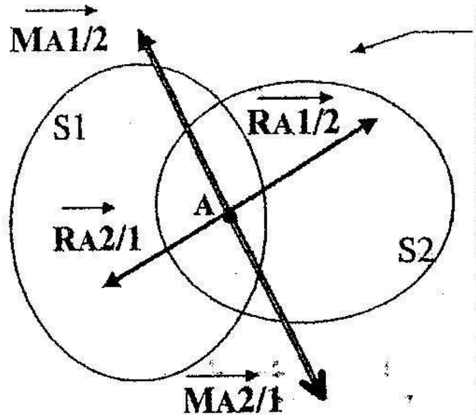
$$\{T_R\}_A = \{T_1\}_A + \{T_2\}_A + \ldots =$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} X1+X2+\ldots & L1+L2+\ldots \\ Y1+Y2+\ldots & M1+M2+\ldots \\ Z1+Z2+\ldots & N1+N2+\ldots \end{array} \right\}_A$$

Pour être additionnés, tous les torseurs doivent être réduits au même point.

CHAPITRE 2: DIFFERENTS TYPES D'ACTIONS

1 - Principe des actions mutuelles.



Le solide S1 agit sur le solide S2
et réciproquement
le solide S2 agit sur le solide S1.

Les deux actions mécaniques qui en résultent sont opposées.

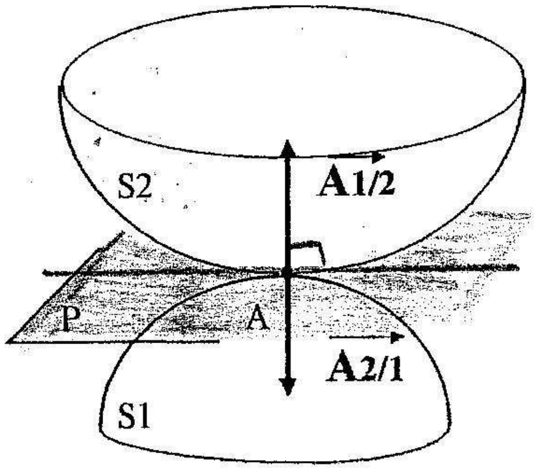
Soit : $\{\mathcal{T}_{2\to1}\}_A = -\{\mathcal{T}_{1\to2}\}_A$

Avec : * $\overrightarrow{R_{A2/1}} = -\overrightarrow{R_{A1/2}}$

et * $\overrightarrow{M_{A2/1}} = -\overrightarrow{M_{A1/2}}$

2 - Actions mécaniques de contact.

2-1 **Action ponctuelle** (théorique).



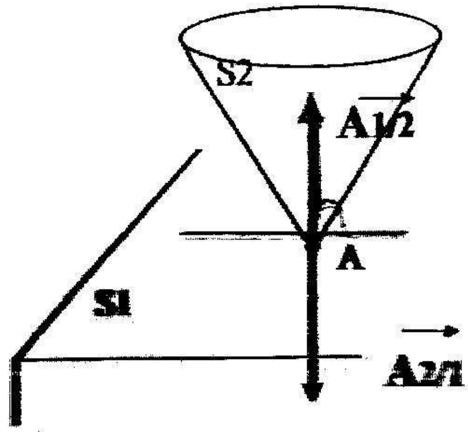
(P) plan tangent commun

$$\{\mathcal{T}_{2\to1}\}_A = -\{\mathcal{T}_{1\to2}\}_A$$
$$\overrightarrow{A2/1} = -\overrightarrow{A1/2}$$

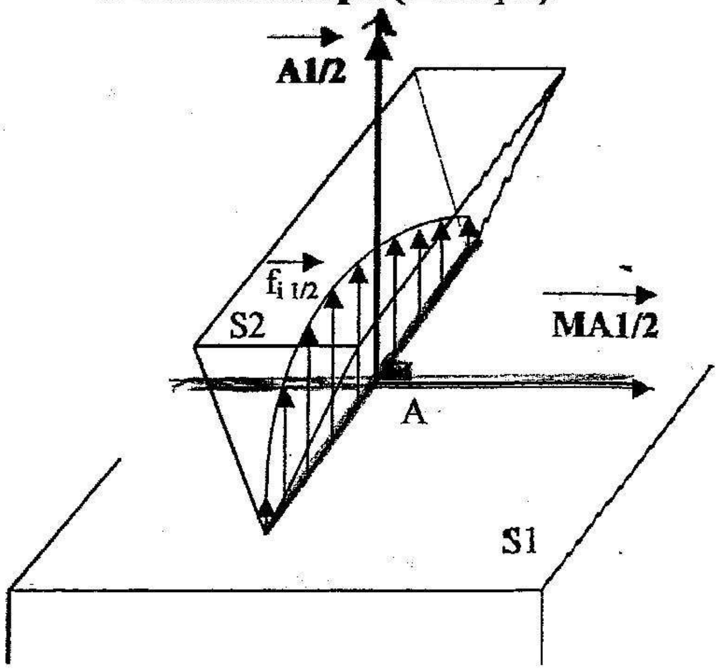
<u>Le contact ponctuel est un contact théorique.</u>

S'il n'y a pas de frottement, il existe 2 forces $\overrightarrow{A1/2}$ et $\overrightarrow{A2/1}$ normales au plan tangent commun passant par A et dirigées vers l'intérieur du solide auquel elles sont appliquées.

$$\{\mathcal{T}_{1\to2}\}_A = \{\overrightarrow{A1/2}, \overrightarrow{0}\}_A$$
$$\{\mathcal{T}_{2\to1}\}_A = \{\overrightarrow{A2/1}, \overrightarrow{0}\}_A$$



2-2 Action linéique (théorique).



S'il n'y a pas de frottement, il existe **une infinité** de forces élémentaires ($\overrightarrow{fi}$), normales à la surface de **contact** (ou plan tangent commun).

Elles seront modélisées au point A, par le torseur :

$$\{T_{1\rightarrow 2}\}_A = \{\overrightarrow{A1/2}, \overrightarrow{MA1/2}\}_A$$

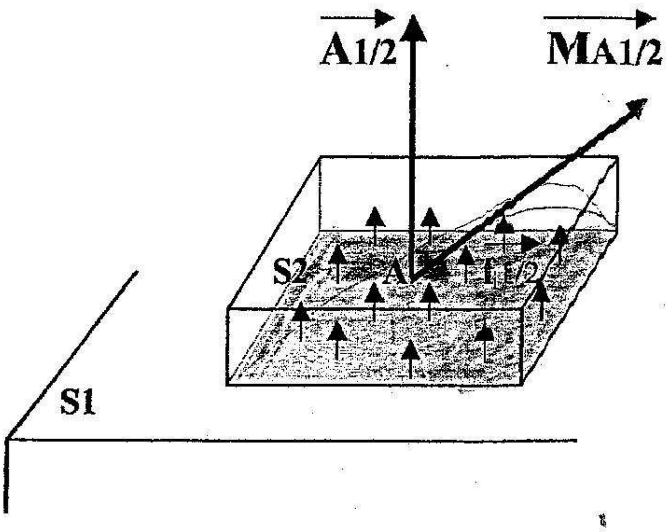
Avec :

$$* \ \overrightarrow{A1/2} = \sum \overrightarrow{f_{i\ 1/2}}$$

$$* \ \overrightarrow{MA1/2} = \sum \overrightarrow{MA\ \overrightarrow{fi1/2}}$$

• contact
• ⊥ angle ([P], $\overrightarrow{A_{12}}$)

2-3 Action surfacique.



S'il n'y a pas de frottement, il existe une infinité de forces élémentaires ($\overrightarrow{fi}$), normales à la surface de contact .

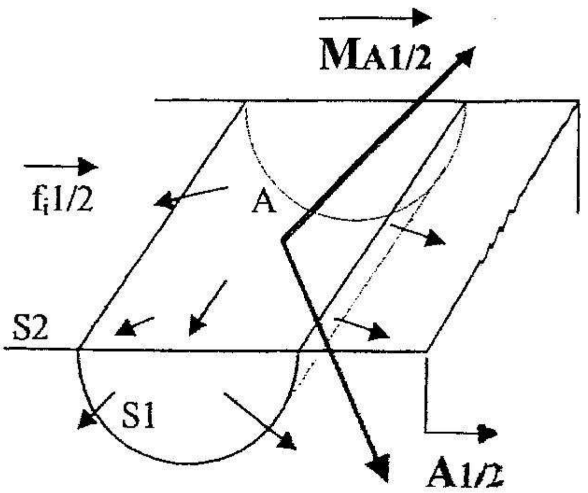
Elles seront modélisées au point A, par le torseur :

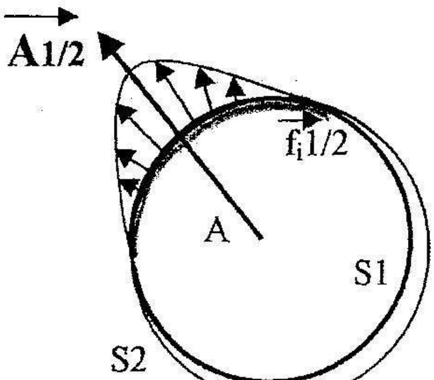
$$\{T_{1\rightarrow 2}\}_A = \{\overrightarrow{A1/2}, \overrightarrow{MA1/2}\}_A$$

Avec :

$$* \ \overrightarrow{A1/2} = \sum \overrightarrow{f_i\ 1/2}$$

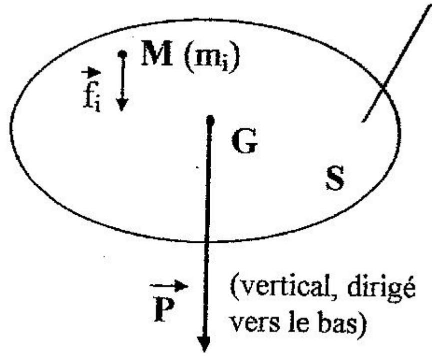
$$* \ \overrightarrow{MA1/2} = \sum \overrightarrow{MA\ \overrightarrow{fi1/2}}$$





$\overrightarrow{A1/2}$ passe par le centre A de l'articulation

3 - Action massique ou de pesanteur.



Sur chaque élément de matière (point matériel) de masse élémentaire m_i s'exerce une force de pesanteur élémentaire $\vec{f_i}$ (selon le ***principe de l'attraction universelle*** de Newton).

L'ensemble de ces forces se «réduit » à une seule force **résultante**, au centre de gravité **G** du solide ; cette force est appelée **poids** du solide.

$$\vec{P} = \sum \vec{f_i} \quad \text{et} \quad \sum m_i . \overrightarrow{GM} = \vec{0} \text{ (barycentre)}$$

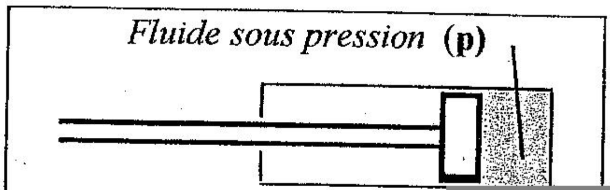
$$\{\mathcal{T}\ \text{pesanteur} \rightarrow S\}_G = \left\{ \vec{P}, \vec{0} \right\}_G \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -M & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}$$

N kg 9,81 m/s²

G pas de moment. Action à distance.

4 - Action de pression.



La pression du fluide est **répartie** uniformément sur toute la surface du piston.

Il existe donc une infinité de forces élémentaires de pression réparties

6 - Actions dans les liaisons.

Principe → Action mécanique transmissible **par le solide S1 sur le solide S2 (et réciproquement)** au travers **de la liaison**.

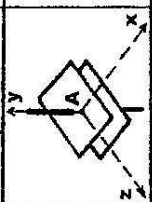
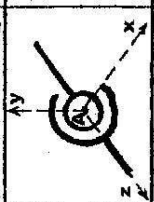
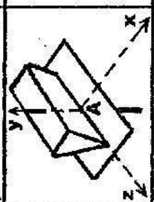
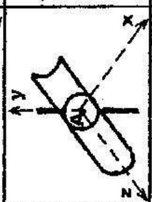
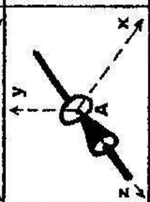
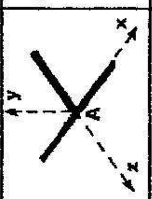
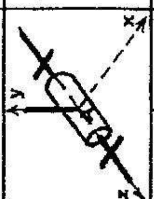
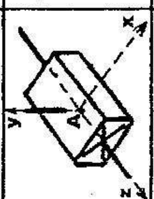
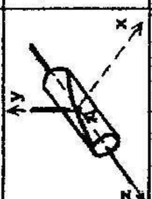
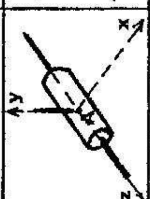
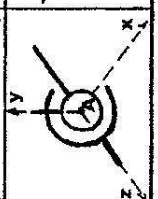
- ✓ Les liaisons sont supposées ***géométriquement parfaites*** et ***sans frottement***.
- ✓ Le torseur d'effort transmissible est défini au ***centre de la liaison***.

Mécanisme plan →
✓ Le mécanisme admet un plan de symétrie géométrique et mécanique.
✓ Le « ***torseur statique transmissible*** » (dans le cas d'un mécanisme plan xOy) est alors de la forme :

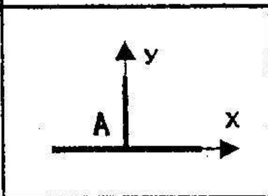
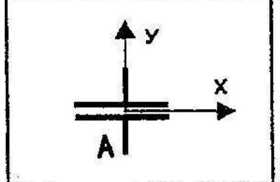
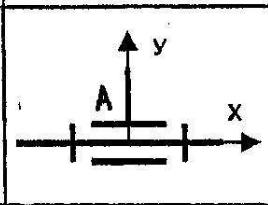
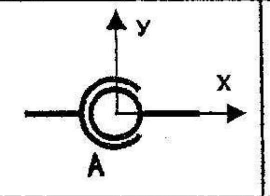
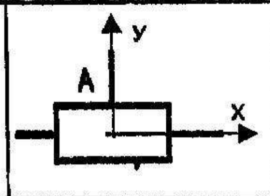
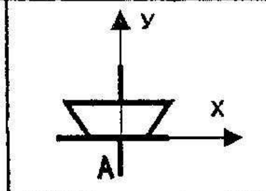
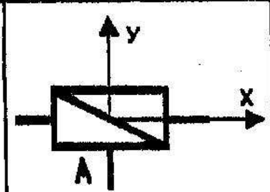
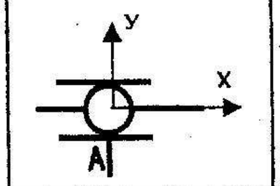
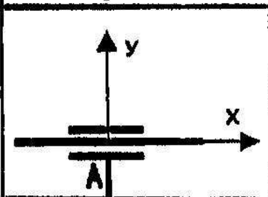
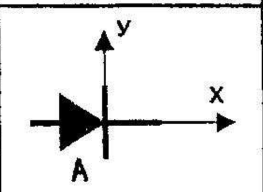
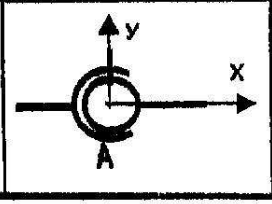
$$\begin{Bmatrix} X & L\,0 \\ Y & M\,0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}_R$$

$Z = L = M = 0$

6 -1 Torseur statique transmissible - Mécanisme spatial.

Désignation liaison	Représentation spatiale	Degrés de liberté T	Degrés de liberté R	Torseur transmissible
Appui plan		Tx, 0, Tz	0, Ry, 0	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$
Rotule ou sphérique		0, 0, 0	Rx, Ry, Rz	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Linéaire rectiligne		Ty, 0, Tz	0, Ry, Rz	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Linéaire annulaire		Tz, 0, 0	Rx, Ry, Rz	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Ponctuelle		Tx, Ty, 0	Rx, Ry, Rz	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Fixe ou encastrement		0, 0, 0	0, 0, 0	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Pivot		0, 0, 0	0, 0, Rz	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Glissière		0, 0, Tz	0, 0, 0	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ 0 & N \end{Bmatrix}$
Hélicoïdale		0, 0, Tz	0, 0, Rz	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Pivot glissant		0, 0, Tx	0, 0, Rz	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Sphérique à doigt		0, 0, 0	Rx, Ry, 0	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & N \end{Bmatrix}$

5 - 2 Torseur statique transmissible - Mécanisme plan « type xOy ».

Désignation liaison	Représentation plane	Degrés de liberté	Torseur transmissible	Désignation liaison	Représentation plane	Degrés de liberté	Torseur transmissible
Fixe ou encastrement		T: 0, 0, 0 — R: 0, 0, 0	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$	Appui plan		T: Tx, 0, Tz — R: 0, Ry, 0	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$
Pivot		T: 0, 0, 0 — R: Rx, 0, 0	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$	Rotule ou sphérique		T: 0, 0, 0 — R: Rx, Ry, Rz	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Glissière		T: Tx, 0, 0 — R: 0, 0, 0	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$	Linéaire rectiligne		T: Tx, 0, Tz — R: 0, Ry, 0	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$
Hélicoïdale		T: Tx, 0, 0 — R: Rx, 0, 0	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$	Linéaire annulaire		T: Tx, 0, 0 — R: Rx, Ry, Rz	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Pivot glissant		T: Tx, 0, 0 — R: Rx, 0, 0	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix}$	Ponctuelle		T: 0, Ty, Tz — R: Rx, Ry, Rz	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Sphérique à doigt		T: 0, 0, 0 — R: 0, Ry, Rz	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$				